

Nombres complexes

Nombres complexes.....	1
1. Calculer la forme algébrique d'un nombre complexe et placer l'image d'un nombre complexe (c'est-à-dire un point) dans le plan.	2
2. La partie réelle et la partie imaginaire d'un complexe.....	2
3. Le complexe conjugué z	2
4. Forme trigonométrique d'un nombre complexe.....	3
5. Équations	4
6. $\mathbb{C}$ et les vecteurs	9
7. Exercices des Tests Communs	13
8. Solutions détaillées.....	17

1. Calculer la forme algébrique d'un nombre complexe et placer l'image d'un nombre complexe (c'est-à-dire un point) dans le plan.

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit les points A_i d'affixes z_i données ci-dessous.

Écrire chacun des nombres complexes ci-dessous sous forme algébrique.

Ensuite, placer dans le plan les points A_i quand c'est possible.

- | | | |
|--|------------------------------------|--|
| 1) $z_1 = (1 - i) + (2 + 3i)$ | 2) $z_2 = (1 - i)(2 + 3i)$ | 3) $z_3 = \frac{(1-i)}{(2+3i)}$ |
| 4) $z_4 = 4(1 - i) + 2 - 3i$ | 5) $z_5 = i - i(5 - 2i)$ | 6) $z_6 = \frac{1}{2-i}$ |
| 7) $z_7 = (1 + i) - 2(-2i) - 1$ | 8) $z_8 = (3 - i)^2$ | 9) $z_9 = \frac{7+i}{3+2i}$ |
| 10) $z_{10} = (\sqrt{2} - 3i)(-\sqrt{2} - 3i)$ | 11) $z_{11} = \frac{1+i}{1-i}$ | 12) $z_{12} = (2 - i)(3 + 4i)(5 - i) - 55 - 15i$ |
| 13) $z_{13} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2+2i}$ | 14) $z_{14} = (1 - 3i)^2(-8 + 6i)$ | 15) $z_{15} = \frac{(1+i)+(-2i)}{(1+i)-(-2i)}$ |
| 16) $z_{16} = (1 - i)^3$ | 17) $z_{17} = \frac{1}{1+i}$ | 18) $z_{18} = (1 + i)^2(-2i)$ |
| 19) $z_{19} = \frac{1}{3+2i}$ | 20) $z_{20} = (2 + i)^3$ | 21) $z_{21} = \frac{2i}{1+3i}$ |
| 22) $z_{22} = i^3$ | 23) $z_{23} = i^4$ | 24) $z_{24} = i^5$ |
| 25) $z_{25} = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^7$ | 26) $z_{26} = \frac{1}{i}$ | 27) $z_{27} = \frac{i}{2-3i}$ |
| 28) $z_{28} = \frac{-3}{(i+1)(2-i)}$ | 29) $z_{29} = \frac{1+i}{-2i}$ | |

Solution de l'exercice 1

- 1) $3+2i$ 2) $5+i$ 3) $-\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$ 4) $6-7i$ 5) $-2-4i$ 6) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$ 7) $5i$ 8) $8-6i$ 9) $\frac{23}{13} - \frac{11}{13}i$ 10) -11 11) i 12) 0 13) $\frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4}i$ 14) 100 15) $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ 16) $-2-2i$ 17) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ 18) 4 19) $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$ 20) $2+11i$ 21) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ 22) $-i$ 23) 1 24) i 25) 0 26) $-i$ 27) $-\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$ 28) $-\frac{9}{10} + \frac{3}{10}i$ 29) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

2. La partie réelle et la partie imaginaire d'un complexe

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points A_i d'affixes z_i données ci-dessous. Placer dans le plan les points A_i . Que valent la partie réelle et la partie imaginaire de z_i . Est-ce que z est un réel? Est-ce que z est un imaginaire pur?

- a) $z_1 = 2 - 4i$ b) $z_2 = -3$ c) $z_3 = 3i$ d) $z_4 = 0$

Solution de l'exercice 2

- a) $\operatorname{Re}(z_1) = 2, \operatorname{Im}(z_1) = -4, z_1$ n'est pas un réel, z_1 n'est pas un imaginaire pur;
 b) $\operatorname{Re}(z_2) = -3, \operatorname{Im}(z_2) = 0, z_2$ est un réel, z_2 n'est pas un imaginaire pur;
 c) $\operatorname{Re}(z_3) = 0, \operatorname{Im}(z_3) = 3, z_3$ n'est pas un réel, z_3 est un imaginaire pur;
 d) $\operatorname{Re}(z_4) = 0, \operatorname{Im}(z_4) = 0, z_4$ est un réel, z_4 est un imaginaire pur.

3. Le complexe conjugué $\bar{z}$

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Que vaut $\bar{z}_i$?

- a) $z_1 = -3 - 2i$ b) $z_2 = 2$ c) $z_3 = 3i$ d) $z_4 = 0$

Solution de l'exercice 3

- a) $\bar{z}_1 = -3 + 2i$; b) $\bar{z}_2 = 2$; c) $\bar{z}_3 = -3i$; d) $\bar{z}_4 = 0$.

4. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Compétences travaillées dans cette séance d'exercices :

- 1) **Calculer LE module d'un nombre complexe.**
- 2) **Calculer UN argument d'un nombre complexe** (un nombre complexe a une infinité d'arguments sauf 0 qui n'en n'a pas).
- 3) **Calculer UNE forme trigonométrique d'un nombre complexe** (un nombre complexe a une infinité de formes trigonométriques sauf 0 qui n'en n'a pas).
- 4) **Placer l'image d'un nombre complexe dans le plan en utilisant sa forme trigonométrique.**

Remarque : Nous donnerons toujours l'argument principal, c'est-à-dire l'argument appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$, et la forme trigonométrique principale.

Définitions

$$abs: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}: a + ib \mapsto abs(a + ib) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Remarque : on note $|a + ib|$ pour $abs(a + ib)$.

$$arg: \mathbb{C}^* \rightarrow]-\pi; \pi]: a + ib \mapsto arg(a + ib) = \begin{cases} \arccos \frac{a}{|a + ib|} & \text{si } b \geq 0 \\ -\arccos \frac{a}{|a + ib|} & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

Propriété

Soient $a + ib \in \mathbb{C}$.

Soit le point $M(a + ib)$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Alors, $OM = |a + ib|$

si $a + ib \neq 0$ alors $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = arg(a + ib)$.

Preuve

$OM^2 = a^2 + b^2$ par le théorème de Pythagore.

$$OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + ib|$$

Supposons que $a + ib \neq 0$.

Soit le point $M' \left(\frac{a+ib}{|a+ib|} \right)$.

$$OM' = \sqrt{\left(\frac{a}{|a + ib|} \right)^2 + \left(\frac{b}{|a + ib|} \right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{|a + ib|^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{|a + ib|^2}} = \frac{|a + ib|}{|a + ib|} = 1$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM'})$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM'} = \|\vec{u}\| \|\overrightarrow{OM'}\| \cos(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \cos(\vec{u}, \overrightarrow{OM'})$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM'} = (1) \left(\frac{a}{|a + ib|} \right) + (0) \left(\frac{b}{|a + ib|} \right) = \frac{a}{|a + ib|}$$

$$\cos(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{a}{|a + ib|}$$

$$\text{Si } b \geq 0 \text{ alors } (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \arccos \frac{a}{|a + ib|}.$$

$$\text{Si } b < 0 \text{ alors } (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = -\arccos \frac{a}{|a + ib|}.$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = arg(a + ib)$$

c.q.f.d.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit les points A_i d'affixes z_i données ci-dessous.

Pour chacun des nombres complexes ci-dessous, calculer son module, un de ses arguments et une de ses formes trigonométriques, et ensuite, vérifier que cette forme trigonométrique est correcte à l'aide d'une calculatrice.

Placer dans le plan le points A_i .

- 1) $z_1 = -4 + 4i$
- 2) $z_2 = 5i$
- 3) $z_3 = -6$
- 4) $z_4 = 0$
- 5) $z_5 = -\sqrt{3} - 3i$
- 6) $z_6 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 7) $z_7 = 1 + i$
- 8) $z_8 = -\sqrt{3} + i$
- 9) $z_9 = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$
- 10) $z_{10} = -4$
- 11) $z_{11} = -3i$
- 12) $z_{12} = \frac{\sqrt{3}}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 13) $z_{13} = \frac{5}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2}$
- 14) $z_{14} = -2\sqrt{3} + 6i$
- 15) $z_{15} = 6$
- 16) $z_{16} = 0$
- 17) $z_{17} = 4\sqrt{3} + 4i$
- 18) $z_{18} = -3\sqrt{3} - 3i$
- 19) $z_{19} = 7i$
- 20) $z_{20} = 3\sqrt{3} - 3i$

Solution de l'exercice 4

- 1) $4\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$; 2) $5 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$; 3) $6(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$; 4) le module $|z_4|$ vaut 0, z_4 n'a pas d'argument, z_4 n'a pas de forme trigonométrique ;
- 5) $2\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) \right)$; 6) $1 \left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \right)$; 7) $\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$; 8) $2 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right)$; 9) $4 \left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) \right)$; 10) $4(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$; 11) $3 \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \right)$; 12) $\frac{\sqrt{6}}{3} \left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right)$; 13) $5 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$; 14) $4\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$; 15) $6(\cos(0) + i \sin(0))$; 16) $|z_{16}| = 0$, z_{16} n'a pas d'argument, z_{16} n'a pas de forme trigonométrique ; 17) $8 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$; 18) $6 \left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) \right)$; 19) $7 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$; 20) $6 \left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \right)$.

5. Équations

Exercice 5

Le complexe u , est-il une solution de l'équation (E) ?

- a) $u = -1 + 2i$, $(E) \Leftrightarrow (2 - i)z = 5i$;
- b) $u = 4i$, $(E) \Leftrightarrow (1 - i)z = 3i$.

Solution de l'exercice 5

- a) Oui
- b) Non

Exercice 6 (facultatif)

Le complexe u , est-il une solution de l'équation (E) ?

Nombres complexes

- a) $u = 5 - i, (E) \Leftrightarrow iz = 2 + 5i;$
- b) $u = 1 - i (E) \Leftrightarrow (2 - i)\bar{z} = 3 + i;$
- c) $u = 0, (E) \Leftrightarrow 2z + i = 5i z;$
- d) $u = -\frac{6}{5} - \frac{2i}{5}, (E) \Leftrightarrow (2 + i)z = -2 - 2i;$
- e) $u = -3 + 2i, (E) \Leftrightarrow (2 - i)z - 2i\bar{z} = 5i - 1;$
- f) $u = 3 + 7i, (E) \Leftrightarrow (2 - i)z - 2i\bar{z} = 5i - 1.$

Solution de l'exercice 6

- a) Non
- b) Oui
- c) Non
- d) Oui
- e) Non
- f) Oui

Exercice 7

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

- a) $iz + 2(z - i) = 0$
- b) $(z + 2i)(2z - 3 + i) = 0$
- c) $\frac{2}{z-i} = 1 - i$
- d) $\frac{iz+1}{z-i} = 2$
- e) $i\bar{z} = 1 - i$
- f) $z + 2\bar{z} = 3 - 2i$
- g) $\begin{cases} 2z_1 + z_2 = i \\ z_1 + 2z_2 = 2 \end{cases}$

Solution de l'exercice 7

- a) $\left\{\frac{2}{5} + \frac{4i}{5}\right\}$
- b) $\left\{-2i; \frac{3}{2} - \frac{i}{2}\right\}$
- c) $\{1 + 2i\}$
- d) $\emptyset$
- e) $\{-1 + i\}$
- f) $\{1 + 2i\}$
- g) $\begin{cases} z_1 = \frac{-2}{3} + \frac{2i}{3} \\ z_2 = \frac{4}{3} - \frac{i}{3} \end{cases}$

Exercice 8 (facultatif)

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

- a) $(4 + i)z = 3 - z$
- b) $(i z - 3 + i)((1 - i)z + 4 + 3i) = 0$
- c) $(i z + 1)(z + 3i)(\bar{z} - 1 + 2i) = 0$
- d) $2z + i\bar{z} = 1 - i$
- e) $\begin{cases} iz_1 - 3z_2 = 2 - 3i \\ ((i + 1)z_1 + 2iz_2 = 5 - i \end{cases}$

Solution de l'exercice 8

- a) $\left\{\frac{15}{26} - \frac{3i}{26}\right\}$
- b) $\left\{-1 - 3i; -\frac{1}{2} - \frac{7i}{2}\right\}$
- c) $\{-3i; i; 1 + 2i\}$
- d) $\{1 - i\}$
- e) $\begin{cases} z_1 = \frac{12}{5} - \frac{31i}{5} \\ z_2 = \frac{7}{5} + \frac{9i}{5} \end{cases}$

Exercice 9 (facultatif)

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

- a) $4\bar{z} - (6 + 8i)z = i$
- b) $z = (1 - i)\bar{z} + 3 + 2i$
- c) $\begin{cases} z + 2iz' = i \\ iz - 3z' = 2 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} z_1 + (1 + i)z_2 = 2 - 3i \\ z_1 + 3iz_2 = 3 + 2i \end{cases}$
- e) $\begin{cases} (2 - i)z_1 + (2 + i)z_2 = 6 \\ (3 - 2i)z_1 + (3 + 2i)z_2 = 10 \end{cases}$
- f) $\begin{cases} iz + 3iz' = 5 + i \\ \bar{z} + i\bar{z}' = 1 + i \end{cases}$
- g) $\begin{cases} z_1 + iz_2 - 2z_3 = 1 \\ z_1 - z_2 + 2iz_3 = 2 \\ z_1 + 3z_2 - (1 - i)z_3 = 3 \end{cases}$

Solution de l'exercice 9

- a) $\left\{-\frac{2}{21} - \frac{i}{42}\right\}$
- b) $\{-4 + 3i\}$
- c) $\begin{cases} z = 7i \\ z' = -3 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} z_1 = -\frac{6}{5} - \frac{17i}{5} \\ z_2 = \frac{9}{5} - \frac{7i}{5} \end{cases}$
- e) $\begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i \end{cases}$
- f) $\begin{cases} z = \frac{11}{5} - \frac{7}{5}i \\ z' = \frac{-2}{5} - \frac{6}{5}i \end{cases}$
- g) $\begin{cases} z_1 = \frac{99}{50} - \frac{43i}{50} \\ z_2 = \frac{21}{50} + \frac{3i}{50} \\ z_3 = \frac{23}{50} - \frac{11i}{50} \end{cases}$

Exercice 10 (facultatif)

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

- a) $(1 + i)z = 2$
- b) $2iz - 5 = z + 1$
- c) $(2i + z)(2z + 3i - iz) = 0$
- d) $(iz - 1)(2z + i - 3) = (iz + 1)(iz - 1)$
- e) $\frac{-i}{z+1} = 2$
- f) $\frac{z+3i}{-5iz+2} = -i$
- g) $(1 + i)\bar{z} = 2$
- h) $i\bar{z} + 7 = 2z + 2i$

Solution de l'exercice 10

- a) $\{1 - i\}$
- b) $\left\{\frac{-6}{5} - \frac{12i}{5}\right\}$
- c) $\left\{-2i; \frac{3}{5} - \frac{6i}{5}\right\}$
- d) $\left\{-i; \frac{9}{5} + \frac{2i}{5}\right\}$
- e) $\left\{-1 - \frac{i}{2}\right\}$
- f) $\left\{-\frac{5i}{6}\right\}$
- g) $\{1 + i\}$
- h) $\{4 + i\}$

Exercice 11

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

- 1) $x^2 - 2x + 3 = 0$
- 2) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
- 3) $2x^2 - 2x - 12 = 0$
- 4) $-5x^2 + 3x - \frac{5}{4} = 0$
- 5) $4x^2 - 8x + 4 = 0$
- 6) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

Solution de l'exercice 11

- 1) $S = \{1 + i\sqrt{2}; 1 - i\sqrt{2}\}$
- 2) $S = \left\{\frac{-3}{2}\right\}$
- 3) $S = \{-2; 3\}$
- 4) $S = \left\{\frac{3}{10} + i\frac{2}{5}; \frac{3}{10} - i\frac{2}{5}\right\}$
- 5) $S = \{1\}$
- 6) $S = \left\{\frac{1}{2}; -3\right\}$

6. $\mathbb{C}$ et les vecteurs

Propriétés

Soient A et B deux points du plan, alors : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et α et β deux réels, alors : $z_{\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}} = \alpha z_{\vec{u}} + \beta z_{\vec{v}}$.

Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$, alors : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

Soient un triangle ABC du plan et G le centre de gravité de ce triangle, alors : $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

Soient un vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, alors : $\|\vec{u}\| = |z_{\vec{u}}|$.

Preuve

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$$

$$z_B - z_A = (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha x_{\vec{u}} + \beta x_{\vec{v}} \\ \alpha y_{\vec{u}} + \beta y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$$

$$z_{\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}} = (\alpha x_{\vec{u}} + \beta x_{\vec{v}}) + i(\alpha y_{\vec{u}} + \beta y_{\vec{v}})$$

$$\alpha z_{\vec{u}} + \beta z_{\vec{v}} = \alpha(x_{\vec{u}} + iy_{\vec{u}}) + \beta(x_{\vec{v}} + iy_{\vec{v}}) = (\alpha x_{\vec{u}} + \beta x_{\vec{v}}) + i(\alpha y_{\vec{u}} + \beta y_{\vec{v}})$$

$$z_{\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}} = \alpha z_{\vec{u}} + \beta z_{\vec{v}}$$

$$I \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$$

$$z_I = \frac{x_A + x_B}{2} + i \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{(x_A + iy_A) + (x_B + iy_B)}{2} = \frac{x_A + x_B}{2} + i \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

$$G \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{pmatrix}$$

$$z_I = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} + i \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

$$\frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{(x_A + iy_A) + (x_B + iy_B) + (x_C + iy_C)}{3} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} + i \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

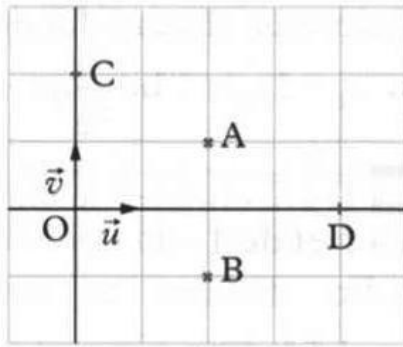
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(x_{\vec{u}})^2 + (y_{\vec{u}})^2}$$

$$|z_{\vec{u}}| = \sqrt{(x_{\vec{u}})^2 + (y_{\vec{u}})^2}$$

$$\|\vec{u}\| = |z_{\vec{u}}|$$

c.q.f.d.

Exercice 12

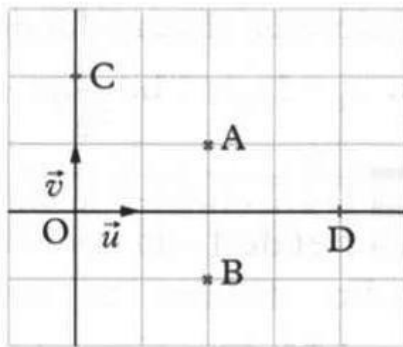


Lire les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{DO}$.

Solution de l'exercice 12

$$z_{\overrightarrow{AB}} = -2i, z_{\overrightarrow{AC}} = -2 + i, z_{\overrightarrow{CB}} = 2 - 3i, z_{\overrightarrow{OC}} = 2i, z_{\overrightarrow{AA}} = 0, z_{\overrightarrow{DO}} = -4$$

Exercice 13 (facultatif)



Lire les affixes des vecteurs $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DD}$, $\overrightarrow{BA}$.

Solution de l'exercice 13

$$z_{\overrightarrow{DC}} = -4 + 2i, z_{\overrightarrow{BD}} = 2 + i, z_{\overrightarrow{DD}} = 0, z_{\overrightarrow{BA}} = 2i$$

Exercice 14

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = -2 + i$ et $z_B = 3i$.

Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2 - i$ et $z_D = -1 - 2i$.

- Donner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Calculer la distance AB .
- Donner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{CD}$.
- Calculer la distance CD .
- Donner l'affixe du vecteur $-3\overrightarrow{AB}$.
- Donner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
- Donner l'affixe du vecteur $-3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD}$.
- Calculer l'affixe du point E sachant que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{DC}$.
- Calculer l'affixe du point F sachant que $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$.
- Calculer l'affixe du point G sachant que $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{CA}$.
- Placer les points A, C, D dans le plan.
Calculer l'affixe du point H pour que $ACDH$ soit un parallélogramme.
Placer le point H dans le plan.
- Soit le point I d'affixe $-2 - 3i$. Placer le point I dans le plan. Prouvez que le triangle ACI est isocèle en C .
- Construire le point J , le symétrique de D par rapport à O . Que vaut l'affixe z_J du point J .

Solution de l'exercice 14

a) $z_{\overrightarrow{AB}} = 2 + 2i$ b) $AB = 2\sqrt{2}$ c) $z_{\overrightarrow{CD}} = -3 - i$ d) $CD = \sqrt{10}$ e) $-6 - 6i$ f) $-1 + i$ g) $-4i$ h) $z_E = -7 + 2i$ i) $z_F = -3 + 12i$ j) $z_G = -7 + 20i$ k) $z_H = -5$ l) $AC = 2\sqrt{5} = IC$ m) $z_J = 1 + 2i$.

Exercice 15 (facultatif)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.

Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 2 - i$.

Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = -1 - 2i$ et $z_D = -3 + 2i$.

- Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BD}$.
- Calculer la distance BD .
- Calculer l'affixe du vecteur $-3\overrightarrow{DA} + 4\overrightarrow{BC}$.
- Calculer l'affixe du point E sachant que $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.
- Placer les points A, B, C dans le plan.
Calculer l'affixe du point H pour que $AHBC$ soit un parallélogramme.
Placer le point H dans le plan.
- Prouvez que le triangle ABC est isocèle en C .
- Construire le point C' , le symétrique de C par rapport à B . Calculer l'affixe $z_{C'}$ du point C' .

Solution de l'exercice 15

a) $z_{\overrightarrow{BD}} = -5 + 3i$ b) $BD = \sqrt{34}$ c) $-21 - i$ d) $-2 + i$ e) $3 + 2i$ f) $AC = \sqrt{10} = BC$ g) $z_{C'} = 5$.

Exercice 16

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm.

Soient les points A, B, C, D et E d'affixes respectives

$$z_A = 3 - \frac{1}{2}i, \quad z_B = 4 + \frac{7}{2}i, \quad z_C = \frac{5}{2}i, \quad z_D = -1 - \frac{3}{2}i \text{ et } z_E = \frac{3}{2} + i.$$

- Placer les points A, B, C, D et E dans le plan.
- Prouver que le triangle ABC est isocèle en B .
- Prouver le quadrilatère $ABCD$ est un losange.
- Prouver que le triangle ABE est un triangle rectangle en E .

Solution de l'exercice 16

- $BC = BA = \sqrt{17}$
- $BC = BA = DA = DC = \sqrt{17}$
- $EA^2 + EB^2 = BA^2$

Exercice 17

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm.

Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i, \quad z_B = \frac{-3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i, \quad z_C = \frac{-3}{2}, \quad z_D = -\frac{3}{2}i.$$

- Placer les points A, B, C et D dans le plan.
- Déterminer une forme trigonométrique des complexes z_A, z_B, z_C et z_D .
- Que peut-on en déduire pour les points A, B, C et D ?

Solution de l'exercice 17

- $$z_A = \frac{3}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$
$$z_B = \frac{3}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$
$$z_C = \frac{3}{2} (\cos \pi + i \sin \pi)$$
$$z_D = \frac{3}{2} \left(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} \right)$$
- Ils se trouvent sur le cercle de centre O et de rayon $\frac{3}{2}$.

7. Exercices des Tests Communs

Exercice 18

- 1°) Trouver la forme algébrique de $z = 3i^9 + 2i^3 - 3i^2 + 5i^{2014} - 5i^{25}$.
- 2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $3z + 2iz = 1 + 5i$. Mettre le résultat sous forme algébrique.
- 3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $4iz - 2\bar{z} = 2 + 2i$. Mettre le résultat sous forme algébrique.
- 4°) On considère les points A d'affixe $z_A = -2 - 4i$, B d'affixe $z_B = 1 - i$ et C d'affixe $z_C = 1 + i$.
- a) Placer ces points dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm.
- b) Calculer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer D .
- 5°) Déterminer la forme trigonométrique de z_B .

Exercice 19

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
2. On donne les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \sqrt{3} - i, z_C = 2i$.
 - a. Déterminer la forme trigonométrique de chacun de ces nombres.
 - b. Construire les points A, B et C dans le plan complexe (on complètera la figure au fur et à mesure).
3. Quelle est la nature du quadrilatère $ACOB$? Justifier.
4. Construire le point D , le symétrique de A par rapport à O . Calculer l'affixe z_D du point D .
5. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Calculer l'affixe z_E du point E .

Exercice 20

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(2 - 5i)z = 16 - 11i$ (écrire la solution sous la forme algébrique).
2. Donner la forme algébrique de $z = 3 + i^5 + i^8 + i^{12} - i^{17} + i^{23} - i^{30}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1 - 2i)z = (-3 - i)\bar{z} + 37 - 13i$ (écrire la solution sous la forme algébrique).

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. Placer les points A, B, D d'affixes respectives $z_A = 3 + 2i$, $z_B = 6 - i$ et $z_D = 7 + 3i$.
2. Construire le point C pour que $ABCD$ soit un parallélogramme et déterminer son affixe z_C par le calcul.
3. Construire le point E tel que $\overline{AE} = -\overline{AD} + \frac{2}{3}\overline{AB}$ et déterminer son affixe z_E par le calcul.
4. Déterminer la forme trigonométrique de z_E .

Exercice 21

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les nombres complexes :

$$z_1 = (1 - i)(1 + 2i), \quad z_2 = \frac{2 + 6i}{3 - i}, \quad z_3 = \frac{4i}{i - 1}$$

1. Calculer la forme algébrique de z_1, z_2, z_3 en précisant la partie réelle et imaginaire.
2. Placer les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 2 - 2i, z_B = 3 + i, z_C = 2i$ dans le plan complexe.
3. Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC . En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.
4. Construire le point D tel que $ABCD$ soit un carré. Déterminer l'affixe z_D du point D .
5. Construire le point E tel que $\overline{AE} = 2\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{BC}$. Déterminer l'affixe z_E du point E .

Exercice 22

On considère les nombres complexes $A(-1+i)$, $B(2)$ et $C(3+3i)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.
2. Déterminer l'affixe du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer l'affixe du point E , l'image de C par la symétrie centrale de centre A .

Exercice 23

Partie A:

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) les équations $\frac{iz}{i-1} = \frac{z+3-2i}{2}$ et $\bar{z} - 2i - 7z = 6(i+1) - 4z$

2) le système d'inconnues complexes z_1 et z_2 :
$$\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 1 - 7i \\ iz_1 + 2z_2 = 11i \end{cases}$$

Partie B:

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 2+3i, z_B = 1-4i, z_C = -3-2i \text{ et } z_D = -2+5i$$

- 1) Placer les images des affixes de z_A, z_B, z_C, z_D dans le plan complexe. On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.
- 2) Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.
- 3) Déterminer l'affixe du point C' , symétrique du point C par rapport à D .
- 4) Déterminer l'affixe du point A' vérifiant $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.
- 5) Quelle est la nature du quadrilatère $A'BC'D$?

Exercice 24

On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1) Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$.

Déterminer le polynôme Q du second degré à coefficients réels tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P(z) = (z^2 + 3) \cdot Q(z)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3) Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = i\sqrt{3}, \quad z_B = -i\sqrt{3}, \quad z_C = 3 + 2i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_D = \overline{z_C}$$

4) On note E le symétrique de D par rapport à O. Placer le point E sur le dessin. Déterminer la nature du triangle BEC

8. Solutions détaillées

Solution de l'exercice 5

a)

$$(E) \Leftrightarrow (2 - i)z = 5i$$

$$\begin{aligned} \text{Si } z = -1 + 2i \quad \text{alors} \quad (E) &\Leftrightarrow (2 - i)(-1 + 2i) = 5i \\ &\Leftrightarrow -2 + 4i + i - 2i^2 = 5i \\ &\Leftrightarrow -2 + 5i + 2 = 5i \\ &\Leftrightarrow 5i = 5i \\ &\Leftrightarrow \text{VRAI} \end{aligned}$$

$-1 + 2i$ est une solution de (E) .

b)

$$(E) \Leftrightarrow (1 - i)z = 3i$$

$$\begin{aligned} \text{Si } z = 4i \quad \text{alors} \quad (E) &\Leftrightarrow (1 - i)(4i) = 3i \\ &\Leftrightarrow 4i - 4i^2 = 3i \\ &\Leftrightarrow 4i + 4 = 3i \\ &\Leftrightarrow \text{FAUX} \end{aligned}$$

$4i$ n'est pas une solution de (E) .

Solution de l'exercice 7

a)

Réolvons $iz + 2(z - i) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} iz + 2(z - i) = 0 &\Leftrightarrow iz + 2z - 2i = 0 \\ &\Leftrightarrow (i + 2)z - 2i = 0 && / + 2i \\ &\Leftrightarrow (i + 2)z = 2i && / \div (i + 2) \\ &\Leftrightarrow z = \frac{2i}{(i+2)}. && . \end{aligned}$$

$$z = \frac{2i(-i + 2)}{(i + 2)(-i + 2)} = \frac{-2i^2 + 4i}{-i^2 + 4} = \frac{2 + 4i}{5}.$$

$$S = \left\{ \frac{2}{5} + \frac{4i}{5} \right\}.$$

b)

$$(z + 2i)(2z - 3 + i) = 0$$

$$z + 2i = 0 \quad \text{ou} \quad 2z - 3 + i = 0$$

$$z = -2i \quad \text{ou} \quad 2z = 3 - i$$

$$z = -2i \quad \text{ou} \quad z = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$$

$$S = \left\{ -2i; \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \right\}.$$

c)

$$\frac{2}{z-i} = 1-i$$

$$2 = (1-i)(z-i)$$

$$2 = z-i-iz+i^2$$

$$2 = z-i-iz-1$$

$$3+i = (1-i)z$$

$$z = \frac{3+i}{1-i}$$

$$z = \frac{3+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i+i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$$

$$S = \{1+2i\}$$

d)

$$\frac{iz+1}{z-i} = 2$$

$$iz+1 = 2(z-i)$$

$$iz+1 = 2z-2i$$

$$iz-2z = -1-2i$$

$$(i-2)z = -1-2i$$

$$z = \frac{-1-2i}{i-2}$$

$$z = \frac{-1-2i}{i-2} \times \frac{i+2}{i+2} = \frac{-i-2-2i^2-4i}{i^2-2^2} = \frac{-5i}{-5} = i$$

On rejette i car on ne peut pas diviser par zéro.

$$S = \emptyset$$

e)

Réolvons $i\bar{z} = 1-i$ dans $\mathbb{C}$.

$$i\bar{z} = 1-i \quad / \div i \quad \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1-i}{i}$$

$$\bar{z} = \frac{(1-i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-i+i^2}{-i^2} = \frac{-i-1}{1} = -1-i$$

$$z = \bar{\bar{z}} = -1+i$$

$$S = \{-1+i\}$$

f)

Réolvons $z+2\bar{z} = 3-2i$ dans $\mathbb{C}$.

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $z = a+ib$.

$$z+2\bar{z} = 3-2i$$

$$(a+ib)+2(a-ib) = 3-2i$$

$$3a-ib = 3-2i$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} 3a = 3 \\ -b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$z = 1+2i$$

$$S = \{1+2i\}$$

g)

$$\text{Résolvons } \begin{cases} 2z_1 + z_2 = i & (1) \\ z_1 + 2z_2 = 2 & (2) \end{cases}.$$

$$z_1 + 2z_2 = 2 \quad / -2z_2 \quad \Leftrightarrow z_1 = 2 - 2z_2 \quad (3).$$

Remplaçons z_1 dans (1) :

$$(1) \quad \Leftrightarrow 2(2 - 2z_2) + z_2 = i \quad \Leftrightarrow 4 - 4z_2 + z_2 = i \quad \Leftrightarrow -3z_2 = -4 + i \quad \Leftrightarrow z_2 = \frac{4}{3} - \frac{i}{3}.$$

$$\text{Remplaçons } z_2 \text{ dans (3)} : z_1 = 2 - 2\left(\frac{4}{3} - \frac{i}{3}\right) = \frac{6}{3} - \frac{8}{3} + \frac{2i}{3} = \frac{-2}{3} + \frac{2i}{3}.$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-2}{3} + \frac{2i}{3} \\ z_2 = \frac{4}{3} - \frac{i}{3} \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} 2z_1 + z_2 = i \\ z_1 + 2z_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1 + z_2 = i \\ -2z_1 - 4z_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1 + z_2 = i \\ -3z_2 = -4 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{i - z_2}{2} \\ z_2 = \frac{-4}{-3} + \frac{i}{-3} = \frac{4}{3} - \frac{i}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{i - \left(\frac{4}{3} - \frac{i}{3}\right)}{2} = \frac{-\frac{4}{3} + \frac{4i}{3}}{2} = -\frac{2}{3} + \frac{2i}{3} \\ z_2 = \frac{4}{3} - \frac{i}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-2}{3} + \frac{2i}{3} \\ z_2 = \frac{4}{3} - \frac{i}{3} \end{cases}$$